Corrigé proposé par :
M. Afekir - École Royale de l'Air
CPGE Marrakech
cpgeafek@yahoo.fr

Champ magnétique et propriétés de la matière

Première partie
Faisceau électronique

1.1. Nature de la trajectoire et application

1.1.1. Le théorème de la résultante cinétique :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_e}{dt} = -e\vec{v}_e \wedge \vec{B}}$$

1.1.2. Projection sur la direction du champ :

$$\frac{d\vec{p}_e}{dt}.\vec{u}_z = -e(\vec{v}_e \wedge \vec{B}).\vec{u}_z = 0$$

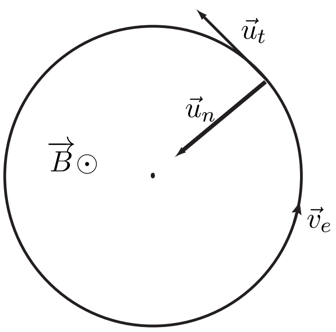
Conséquence : $v_z = cte = v_{oz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = cte} \quad ou \;\; \vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$, La trajectoire de l'électron est, donc, plane. (xOy) est le plan du mouvement.
Projection sur le vecteur vitesse :

$$\frac{d\vec{p}_e}{dt}.\vec{v}_e = -e(\vec{v}_e \wedge \vec{B}).\vec{v}_e = 0$$

$$m.\frac{d\vec{v}_e^2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|\vec{v}_e\| = cte = \|\vec{v}_o\|}$$

La norme de la vitesse de l'électron est, donc, uniforme.

1.1.3. La trajectoire de l'électron est circulaire .



1.1.4. Rayon de giration :

$$m_e\frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

Composantes de Frenet :

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \dfrac{d\vec{v}_e}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_t + \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_n = a_t\vec{e} + a_n\vec{e}_n \\ \vec{v} = v\,\vec{e} \end{cases}$$

- D'après la question 1.1.2., v est uniforme $\Rightarrow$ $a_t = 0$.
- Le mouvement est plan $\Longrightarrow$ $(\vec{e}_t, \vec{e}_n) \in$ plan du mouvement (xOy) $\Longrightarrow$ $\vec{e}_t \wedge \vec{e}_n = \vec{u}_z$.

$$\Longrightarrow -e(\vec{v}_e \wedge \vec{B}).\vec{n} = m_e a_n = m_e \frac{v_o^2}{R}$$

$$e v_e B = m_e \frac{v_o^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{m_e v_o}{eB}}$$

1.1.5. Période du mouvement :

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\frac{e}{m_e}\vec{v}_e \wedge B\vec{u}_z = \vec{v}_e \wedge \vec{\omega}_c$$

$$avec \quad \vec{\omega}_c = -\frac{e\vec{B}}{m_e} = \omega_c \vec{u}_z \quad avec \ \ \omega_c = -\frac{eB}{m_e} = \frac{qB}{m_e}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_o} \quad \text{on trouve} \quad T = \frac{2\pi}{|\omega_c|}$$

$$\text{Application numérique : } \boxed{T = 7,1 \times 10^{-9} s}$$

1.1.6.

$$D = 2R = \frac{2 m_e v_o}{eB}$$

$$\text{Le theoreme de la puissance cinetique donne : } \quad \frac{1}{2} m_e v_o^2 = e\Delta V$$

$$\text{soit} \quad \frac{e}{m_e} = \frac{8\Delta V}{D^2 B^2} \qquad \text{Application numérique : } \boxed{\frac{e}{m_e} = 1,7 \times 10^{11} A.s.kg^{-1}}$$

1.1.7. On mesure la charge de l'électron par simple mesure du rapport $\frac{e}{m_e}$ à partir de la trajectoire d'un faisceau d'électron dans un tube cathodique . $D = 2R$ est mesurable et m_e est une donnée.

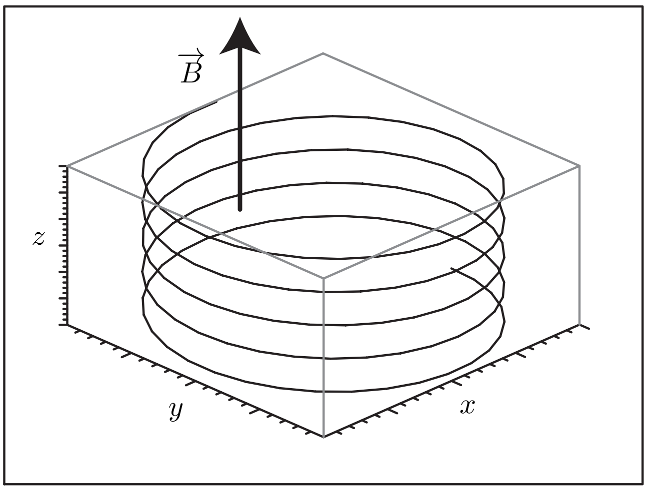
1.1.8. Comparaison entre le poids de l'électron et la force de Lorentz :

Poids de l'electron : $P_e = m_e g = 9,1.10^{-31} \times 9,8 \approx 90 \times 10^{-31} kg.m.s^{-2}$

Force de Lorentz : $f_L = e v_e B = 1,6 \times 10^{-19} \times 10^7 \times 10.10^{-3} \approx 16 \times 10^{-15} kg.m.s^{-2}$

Consequence : $\boxed{P_e << f_L}$

1.1.9. La trajectoire de l'électron est hélicoïdal d'axe Oz



1.2. Stabilité de la trajectoire électronique

1.2.1. Théorème de la résultante cinétique :

$$\frac{d\vec{p}_e}{dt} = m_e\vec{a} = -e\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$
$$-e(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) \wedge B\vec{u}_z = m_e \left\{(\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z\right\}$$

Soient $$\boxed{\begin{cases} -erB\dot{\theta} = m_e(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ e\dot{r}B = m_e(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ 0 = m_e\ddot{z} \end{cases}}$$

1.2.2. Relation entre ε_r et $\dot{\varepsilon}_\theta$:

$$e\dot{r}B = m_e(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad eq\,(1)$$
$$-m_e\omega_c = m_e(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$
$$\begin{cases} r\ddot{\theta} = (R + \varepsilon_r)(\ddot{\varepsilon}_\theta) \simeq R\ddot{\varepsilon}_\theta \\ \dot{r}\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}_r(-\omega_c + \dot{\varepsilon}_\theta) = -\omega_c\dot{\varepsilon}_r \end{cases}$$
$$eq\,(1) \quad \Rightarrow \quad R\ddot{\varepsilon}_\theta = \omega_c\dot{\varepsilon}_r \qquad \text{ou} \quad \boxed{R\dot{\varepsilon}_\theta = \omega_c\varepsilon_r}$$

1.2.3. Équation différentielle vérifiée par ε_r :

$$-erB\dot{\theta} = m_e(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad \Rightarrow \quad \omega_c r\dot{\theta} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad eq\,(2)$$
$$Avec \;\; : \;\; \begin{cases} \ddot{r} = \ddot{\varepsilon}_r \\ r\dot{\theta}^2 = (R + \varepsilon_r)(-\omega_c + \dot{\varepsilon}_\theta)^2 \simeq (R + \varepsilon_r)(\omega_c^2 - 2\omega_c\dot{\varepsilon}_\theta) \;\simeq R(\omega_c^2 - 2\omega_c\dot{\varepsilon}_\theta) + \omega_c^2\varepsilon_r \\ r\dot{\theta} = (R + \varepsilon_r)(-\omega_c + \dot{\varepsilon}_\theta) \simeq R(-\omega_c + \dot{\varepsilon}_\theta) - \omega_c\varepsilon_r \end{cases}$$

$$eq(2) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varepsilon}_r + \omega_c R\dot{\varepsilon}_\theta = 0 \quad avec \quad R\dot{\varepsilon}_\theta = \omega_c\varepsilon_r$$

On en déduit l'équation : $\boxed{\ddot{\varepsilon}_r + \omega_c^2\varepsilon_r = 0}$

1.2.4. Solution de l'équation différentielle :

$$\varepsilon_r(t) = C_1\cos(\omega_c t) + C_2\sin(\omega_c t)$$

C_1 et C_1 deux constantes. Les conditions initiales donnent : $\varepsilon_r(0) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; C_1 = 0$ soit $\varepsilon_r(t) = C_2\sin(\omega_c t)$

$$\Rightarrow \; \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\omega_c}{R}C_1\sin(\omega_c t)$$

Finalement $$\boxed{\begin{cases} r(t) = R + C_1\sin(\omega_c t) \\ \dot{\theta}(t) = -\omega_c + \dfrac{\omega_c}{R}C_1\sin(\omega_c t) \end{cases}}$$

Le mouvement radial et le mouvement orthoradial sont sinusoïdales, donc, stables.

1.2.5. Le mouvement axiale suivant Oz est rectiligne uniforme, donc, stable.

Deuxième partie
Effet Zeeman

2.1. Théorème de Larmor

2.1.1. Le théorème de la résultante cinétique appliquée ,à l'électron, dans le repère $\mathcal{R}$ supposé fixe :

$$\left(\frac{d\vec{p}_e}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = q\,\overrightarrow{E} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{a}_o = q\frac{\overrightarrow{E}}{m_e}}$$

2.1.2. Le théorème de la résultante cinétique appliquée ,à l'électron, dans le repère $\mathcal{R}$ avec $\vec{v}_e = \vec{v}$:

$$\left(\frac{d\vec{p}_e}{dt}\right)_{R} = q\left(\overrightarrow{E} + \vec{v}_e \wedge \overrightarrow{B}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = \frac{q}{m_e}\left(\overrightarrow{E} + \vec{v}_e \wedge \overrightarrow{B}\right)$$

2.1.3. Étude dans un référentiel $\mathcal{R}'$ mobile :

2.1.3.1. Le repère $\mathcal{R}'$ est en *rotation uniforme* par rapport à $\mathcal{R}$, donc :

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}) - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}'$$

Soit d'après la question précédente (2.1.2. :

$$\vec{a}' = \frac{q}{m_e}\left(\vec{E} + (\vec{v}' + \vec{\Omega}\wedge\vec{r})\wedge\vec{B}\right) - \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r} - 2\vec{v}'\right)$$

2.1.3.2. L'accélération $\vec{a}'$ pourra s'écrire sous la forme :

$$\vec{a}' = \frac{q}{m_e}\left(\vec{E} + \vec{\Omega}\wedge\vec{r}\wedge\vec{B}\right) - \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right) + \vec{v}'\wedge\left(\frac{q}{m_e}\vec{B} + 2\vec{\Omega}\right)$$

On choisira $\vec{\Omega}$ afin d'éliminer $\vec{v}'$ dans l'expression de $\vec{a}'$, soit :

$$\vec{v}'\wedge\left(\frac{q}{m_e}\vec{B} + 2\vec{\Omega}\right) = \vec{0} \qquad \text{ou} \qquad \vec{\Omega} = -\frac{q}{2m_e}\overrightarrow{B}$$

L'expression précédente, de $\vec{a}'$, devient :

$$\boxed{\vec{a}' = \frac{q\vec{E}}{m_e} + \frac{q^2}{4m_e}\vec{B}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{r}) \qquad (6)}$$

2.1.3.3. Le champ $\vec{E}$ crée par le noyau de l'atome d'hydrogène :

$$\boxed{\vec{E} = +\frac{e}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u}_r} \qquad \text{tel que :} \qquad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

2.1.3.4.

$$\rho < \rho_{\max} = \frac{\left\|\frac{q^2}{4m_e}\vec{B}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{r})\right\|_{\max}}{\left\|q\vec{E}\right\|} = \frac{\pi\varepsilon_o r 3B^2}{m_e} \quad avec \quad \varepsilon_o c_o^2\mu_o = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_{\max} = \frac{\pi B^2 r^3}{\mu_o c_o^2 m_e}}$$

2.1.3.5. Application numérique :

$$\rho_{\max} = 3.10^{-11} << 1 \Rightarrow \boxed{\vec{a}' = q\frac{\vec{E}}{m_e}}$$

2.1.4. D'après les résultats précédentes :

$$\vec{\Omega} = -\frac{q}{2m_e}\vec{B}$$

, le théorème de Larmor est bien vérifié.

2.2. Oscillateur harmonique spatial

La force de rappel $\vec{f_r} = -m_e\omega_o^2\vec{r}$ et on note le vecteur moment cinétique par $\vec{\sigma}$

2.2.1. Le théorème du moment cinétique appliqué à l'électron dans le repère d'étude :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r}\wedge\vec{f_r}\ \vec{r}\wedge\left(-m_e\omega_o^2\vec{r}\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma} = \vec{k} \text{ (constante)}$$

Le moment cinétique $\vec{\sigma}$ est un constante vectorielle, donc le mouvement de l'électron est plan. Le plan du mouvement est le plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique $\vec{\sigma}$, soit $(\vec{r}(t), \vec{v}(t))$. Le mouvement pourra être rectiligne si $\vec{k} = \vec{0}$.

$$\text{En effet : } \vec{\sigma} = \vec{r}\wedge m_e\vec{v}_e = m_e r^2\dot{\theta}(t)\vec{u}_z = \vec{0} \quad \text{donne : } \boxed{\dot{\theta}(t) = 0}$$

2.2.2. $\vec{\sigma} = \sigma\vec{u}_z = \sigma\vec{u}$

2.2.2.1. La projection σ sur $\vec{u}$ du moment cinétique :

$$\boxed{\sigma = m_e r^2\dot{\theta}(t)}$$

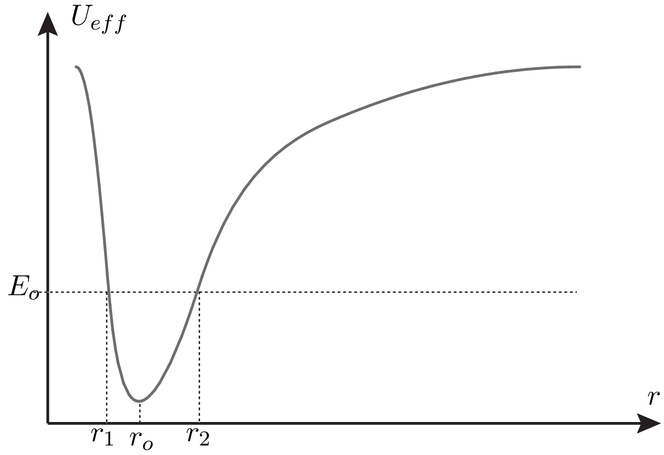
2.2.2.2. Énergie mécanique de l'électron :

$$E = E_c + E_p \quad \textit{tels que} \quad : \begin{cases} \delta W\left(\vec{f_r}\right) = -dE_p \quad ou \quad E_p = \frac{1}{2}m_e\omega_o^2r^2 + cte \\ E_c = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}m_e\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

$$Or\ \sigma = m_e r^2\dot{\theta}\ \ et\ \ E_p(0) = 0 \quad d'ou \ : \ E = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2m_e r^2} + \frac{1}{2}m_e\omega_o^2r^2 = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

$$\text{Soit : } \boxed{U_{eff}(r) = \frac{\sigma^2}{2m_e r^2} + \frac{1}{2}m_e\omega_o^2 r^2}$$

2.2.2.3. Graphe de $U_{eff}(r)$:



La seule force auxquelles est soumis l'électron est conservative, l'énergie mécanique est, donc, conservatif (constante du mouvement). La condition du mouvement possible :$E \geqslant U_{eff}(r)$. La position r_o est telle que :

$$\left(\frac{dU_{eff}(r)}{dr}\right)_{r_o} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_o = \sqrt{\frac{\sigma}{m_e\omega_o}} \quad et \quad E(r_o) = E_o = \sigma\omega_o$$

$E = E(r_o)$	Mouvement circulaire
$E > E(r_o)$	Mouvement oscillatoire autour de la position d'équilibre stable r_o

2.2.2.4. Pour $E = E_o = \sigma\omega_o$, la trajectoire est circulaire. Le rayon de la trajectoire :

$$\boxed{r_o = \sqrt{\frac{\sigma}{m_e\omega_o}}}$$

2.2.3. Théorème de la résultante cinétique :

$$m_e\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m_e\omega_o^2\vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_o^2\vec{r} = \vec{0}$$

La solution de l'équation différentielle vérifiée par $\vec{r}(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{C_1}\cos(\omega_o t) + \overrightarrow{C_2}\sin(\omega_o t)$$

Les conditions initiales donnent :

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(0)\cos(\omega_o t) + \frac{\dot{\vec{r}}(0)}{\omega_o}\sin(\omega_o t)}$$

2.2.4. Mouvement de l'électron le long de Oz :

2.2.4.1. Par projection de $\vec{r}(t)$ dur $\vec{u}_z$, on obtient :

$$\boxed{z(t) = z(0)\cos(\omega_o t) + \frac{\dot{z}(0)}{\omega_o}\sin(\omega_o t)}$$

2.2.4.2. Représentation complexe de la composante suivant l'axe Oz :

$$\boxed{\underline{\vec{z}}(t) = Z\exp -i\left(\omega_o t + \zeta\right)\vec{u}_z \quad avec \quad \begin{cases} Z = \sqrt{z^2(0) + \left(\dfrac{\dot{z}(0)}{\omega_o}\right)^2} \\ \arg \underline{z}(t) = -\zeta = \arctan\left(\dfrac{\dot{z}(0)}{z(0)\omega_o}\right) \end{cases}}$$

2.2.5. $\underline{\vec{x}}(t) = A\exp -i\left(\omega_o t + \alpha\right)\vec{u}_x$

2.2.5.1. D'après l'équation (**14**),$\underline{\vec{x}}(t) = 2A'\exp -i\left(\omega_o t + \alpha\right)\vec{u}_x$, ce qui implique que : $\boxed{2A' = A}$

2.2.5.2. Les parties réelles des termes vectorielles de $\underline{\vec{x}}(t)$:

$$\mathcal{R}_e\left(\frac{A}{2}(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)\exp -i\left(\omega_o t + \alpha\right)\right) = \frac{A}{2}\left(\cos\left(\omega_o t + \alpha\right)\vec{u}_x + \sin\left(\omega_o t + \alpha\right)\vec{u}_y\right) \qquad (g)$$

$$\mathcal{R}_e\left(\frac{A}{2}(\vec{u}_x - i\vec{u}_y)\exp -i\left(\omega_o t + \alpha\right)\right) = \frac{A}{2}\left(\cos\left(\omega_o t + \alpha\right)\vec{u}_x - \sin\left(\omega_o t + \alpha\right)\vec{u}_y\right) \qquad (d)$$

(d) : caractérise le mouvement circulaire droit dans le plan (xOy)

(g) : caractérise le mouvement circulaire gauche dans le plan (xOy)

2.2.6. $\underline{\vec{y}}(t) = B\exp -i\left(\omega_o t + \beta\right)\vec{u}_y$. $\underline{\vec{y}}(t)$ pourra s'écrire sous la forme :

$$\underline{\vec{y}}(t) = B'(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)\exp -i\left(\omega_o t + \beta\right) - B'(\vec{u}_x - i\vec{u}_y)\exp -i\left(\omega_o t + \beta\right) \quad \text{avec} \quad \boxed{2iB' = B}$$

2.2.7. Le mouvement de l'électron dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz est décrit par :

$$\vec{r}_\perp(t) \;=\; \vec{x}(t) \;+\; \vec{y}(t)$$

2.2.7.1. On remplace $\underline{\vec{x}}(t)$ et $\underline{\vec{y}}(t)$ par leurs expressions, on obtient :

$$\underline{\vec{r}}_\perp(t) = \left(\frac{A}{2}e^{-i\alpha} - \frac{iB}{2}e^{-i\beta}\right)(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)e^{-i\omega_o t} + \left(\frac{A}{2}e^{-i\alpha} + \frac{iB}{2}e^{-i\beta}\right)(\vec{u}_x - i\vec{u}_y)e^{-i\omega_o t}$$

Soit : $$\underline{\vec{r}}_\perp(t) \;=\; \underline{R}_g(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)e^{-i\omega_o t} + \underline{R}_d(\vec{u}_x - i\vec{u}_y)e^{-i\omega_o t} \quad tels \;\; que \quad \boxed{\begin{cases} \underline{R}_g = \dfrac{1}{2}(Ae^{-i\alpha} - iBe^{-i\beta}) \\ \underline{R}_d = \dfrac{1}{2}(Ae^{-i\alpha} + iBe^{-i\beta}) \end{cases}}$$

2.2.7.2. Le mouvement général est elliptique : oscillateur spatial.

2.3. Changements de fréquence dus à la rotation de Larmor

2.3.1. Théorème de la résultante cinétique appliqué dans le référentiel du laboratoire :

$$\boxed{m_e\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v}\wedge B\vec{u}_z + \vec{f}_r}$$

2.3.2. Projection selon l'axe Oz :

$$m_e\vec{u}_z.\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{u}_z.\vec{v}\wedge B\vec{u}_z + \vec{u}_z.\vec{f}_r = 0 \;\;\Rightarrow\;\; v_z \;=\; 0$$

2.3.3. Projection selon l'axe Ox et selon l'axe Oy :

$$\ddot{x}(t) = -\frac{eB}{m_e}\dot{y}(t) - \omega_o^2 x(t) \qquad et \qquad \ddot{y}(t) = +\frac{eB}{m_e}\dot{x}(t) - \omega_o^2 y(t)$$

2.3.4. $\underline{R}_d = 0 \Rightarrow Aexp - i\alpha = -iBexp - i\beta$ et $\underline{R}_g = Aexp - i\alpha$.

2.3.4.1. Expressions de $x(t)$ et $y(t)$:

$$x(t) = \underline{R}_g e^{-i\omega_o t} = Xe^{-i\omega_+ t} \qquad et \qquad y(t) = i\underline{R}_g e^{-i\omega_o t} = iXe^{-i\omega_+ t}$$

$$Avec \quad X \;=\; \underline{R}_g \times \underline{R}_g^* \;=\; A^2$$

On trouve :

$$\dot{y}(t) = iX(-i\omega_+)e^{-i\omega_+ t} \quad = \quad X\omega_+ e^{-i\omega_+ t} \quad = \quad \omega_+ x(t) \Rightarrow \quad \boxed{\dot{y}(t) = \omega_+ x(t)} \;\; eq(*)$$

2.3.4.2. De la même manière on en déduit :

$$\boxed{\dot{x}(t) = -\omega_+ y(t)}$$

Par combinaison des équations $eq(*)$ et la première équation en (2.3.3.), on a :

$$\ddot{x}(t) = -\frac{eB}{m_e}\omega_+ x(t) - \omega_o^2 x(t) = -\left(\frac{eB}{m_e}\omega_+ + \omega_o^2\right)x(t)$$

$$\text{Or} \quad \ddot{x}(t) = -\omega_+^2 x(t) \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_+^2 - \frac{eB}{m_e}\omega_+ + \omega_o^2 = 0}$$

2.3.4.3. Domaine visible :

$$0,4 \leq \lambda \leq 0,8 \quad (\text{en } \mu m)$$

$$\text{pour} \quad \lambda_o = 0,4\mu m \quad \begin{cases} \text{la pulsation propre} \quad \omega_o = \dfrac{2\pi c_o}{\lambda_o} \approx 4,71 \times 10^{15} s^{-1} \\ \text{la pulsation cyclotron} \quad \omega_{cy} = \dfrac{eB}{m_e} \approx 1,75 \times 10^{11} s^{-1} \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : Dans le domaine visible, la pulsation cyclotron ω_{cy} est négligeable devant la pulsation ω_o.

2.3.4.4. L'équation vérifiée par ω_+ :

$$\omega_+^2 - \omega_+ \frac{eB}{m_e} - \omega_o^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{eB}{m_e}\right)^2 + 4\omega_o^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_+ = \frac{eB}{2m_e} \pm \sqrt{\left(\frac{eB}{2m_e}\right)^2 + \omega_o^2} \approx \frac{eB}{2m_e} \pm \omega_o$$

La solution acceptable physiquement est $\omega_+ \approx \dfrac{eB}{2m_e} + \omega_o \Rightarrow \boxed{\Delta\upsilon_+ = \dfrac{\omega_+ - \omega_o}{2\pi} = \dfrac{eB}{4\pi m_e}}$

2.3.5. $\underline{R}_g = 0 \Rightarrow Aexp - i\alpha = iBexp - i\beta$ et $\underline{R}_d = Aexp - i\alpha$.
Expressions de $x(t)$ et $y(t)$:

$$x(t) = \underline{R}_d e^{-i\omega_o t} = Ye^{-i\omega_- t} \qquad et \qquad y(t) = -i\underline{R}_d e^{-i\omega_o t} = -iYe^{-i\omega_- t}$$

$$Avec \quad Y = \underline{R}_d \times \underline{R}_d^* = A^2$$

Du même raisonnement qu'en (2.3.4.2.), on montre que ω_- vérifie l'équation suivante :

$$\boxed{\omega_-^2 + \omega_- \frac{eB}{m_e} - \omega_o^2 = 0}$$

La solution acceptable physiquement est $\omega_- \approx -\dfrac{eB}{2m_e} + \omega_o \Rightarrow \boxed{\Delta\upsilon_- = \dfrac{\omega_- - \omega_o}{2\pi} = -\dfrac{eB}{4\pi m_e} = -\Delta\upsilon_+}$

Dans les deux cas on a :

$$\Delta\omega = \omega_\pm - \omega_o = \pm \frac{eB}{2m_e} = -\frac{qB}{2m_e} = \Omega_{\text{larmor}}$$

D'où résultat en accord avec le théorème de Larmor.

2.4. Conséquence sur les raies d'émission de l'atome

2.4.1. Mouvement de l'électron le long de Ox en l'absence de tout *champ magnétique* extérieur :

2.4.1.1. En coordonnées sphérique d'axe Oz, le vecteur position : $\vec{R} = \vec{OM} = R\vec{u}_r$ et le vecteur moment dipolaire électrique : $\vec{p}(t) = -e\vec{r}(t) = -ez(t)\vec{u}_z$ avec la coordonnée $z(t) = R\,cos\theta$

$$\underline{\vec{\mathcal{E}}} = -c_o^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{\mathcal{B}}} = -c_o \vec{u}_r \wedge \underline{\vec{\mathcal{B}}} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{\mathcal{B}}} = \frac{\mu_o \omega^2}{4\pi \left\|\vec{R}\right\| c_o} \vec{u}_r \wedge \underline{\vec{p}}\left(t - \left\|\vec{R}\right\|/c_o\right) = -\frac{\mu_o \omega^2}{4\pi \left\|\vec{R}\right\| c_o} p\left(t - \left\|\vec{R}\right\|/c_o\right) \sin\theta \ \vec{u}_\varphi$$

$$\text{Soit :} \quad \boxed{\underline{\vec{\mathcal{E}}} = -\frac{c_o^2 \mu_o \omega^2}{4\pi \left\|\vec{R}\right\|} p_o \, e^{i\omega\left(t - \left\|\vec{R}\right\|/c_o\right)} \sin\theta \ \vec{u}_\theta}$$

2.4.1.2.

Soit $(\triangle)$, une direction suivant le vecteur $\vec{u}_\varphi$ perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$.

Le champ electrique pourra s'ecrire : $\underline{\vec{\mathcal{E}}} = -\dfrac{\mu_o\omega^2}{4\pi\left\|\overrightarrow{R}\right\|}\left(\vec{u}_\theta.\underline{\vec{p}}\left(t - \left\|\overrightarrow{R}\right\|/c_o\right)\right)\vec{u}_\theta$

- Le champ $\underline{\vec{\mathcal{E}}}$ est polarisé (rectilignement) selon la direction $\vec{u}_\theta$, donc, perpendiculaire à $(\triangle)$.
- Le champ $\underline{\vec{\mathcal{B}}}$ est polarisé (rectilignement) selon la direction $\vec{u}_\varphi$, donc, parallèle à $(\triangle)$.

2.4.1.3.

- Dans la direction de l'axe Oz : $\theta = 0$, donc $\underline{\vec{\mathcal{E}}} = \underline{\vec{\mathcal{B}}} = \vec{0}$ (le moment selon l'axe Oz ne rayonne pas d'onde électromagnétique).
- Dans la direction perpendiculaire à l'axe Oz : $\theta = \pi/2$:

$$\boxed{\underline{\vec{\mathcal{E}}} = +\frac{\mu_o\omega^2}{4\pi\left\|\overrightarrow{R}\right\|}p_o e^{i\omega(t-\left\|\overrightarrow{R}\right\|/c_o)}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \underline{\vec{\mathcal{B}}} = -\frac{\mu_o\omega^2}{4\pi\left\|\overrightarrow{R}\right\|c_o}p_o e^{i\omega(t-\left\|\overrightarrow{R}\right\|/c_o)}\vec{u}_\varphi}$$

2.4.2. Considérons un dipôle oscillant quelconque, de vecteur moment dipôlaire $\vec{p} = p\vec{u}$ ($\vec{u}$ vecteur unitaire)

$$\underline{\vec{\mathcal{E}}} = -c_o^2\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{\mathcal{B}}} = -c_o\vec{u}_r\wedge\underline{\vec{\mathcal{B}}} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{\mathcal{B}}} = \frac{\mu_o\omega^2}{4\pi\left\|\overrightarrow{R}\right\|c_o}\vec{u}_r\wedge\underline{\vec{p}} = \frac{\mu_o\omega^2}{4\pi\left\|\overrightarrow{R}\right\|c_o}p_o e^{i\omega(t-\left\|\overrightarrow{R}\right\|/c_o)}\left(\vec{u}_r\wedge\vec{u}\right)$$

Posons :

$$\left(\widehat{\vec{u}_r,\vec{u}}\right) = \phi \quad \text{ce qui donne : } \vec{u}_r\wedge\vec{u} = \sin\phi\;\vec{u}_{\mathcal{B}} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_{\mathcal{B}} = \frac{\underline{\vec{\mathcal{B}}}}{\left\|\underline{\vec{\mathcal{B}}}\right\|}$$

$\vec{u}_r$ et $\vec{u}$ appartiennent au même plan : plan pôlaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, d'où : $\vec{u} = \cos\phi\vec{u}_r + \sin\phi\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_{\mathcal{B}}$

$$\Rightarrow \quad \sin\phi = \vec{u}.\vec{u}_\theta$$

Donc :

$$\underline{\vec{\mathcal{B}}} = \frac{\mu_o\omega^2}{4\pi\left\|\overrightarrow{R}\right\|c_o}p_o e^{i\omega(t-\left\|\overrightarrow{R}\right\|/c_o)}\left(\vec{u}.\vec{u}_\theta\right)\vec{u}_\varphi \;\Rightarrow\; \underline{\vec{\mathcal{E}}} = -\frac{\mu_o\omega^2}{4\pi\left\|\overrightarrow{R}\right\|}p(t - \left\|\overrightarrow{R}\right\|/c_o)(\vec{u}.\vec{u}_\theta)(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\varphi)$$

D'où le résultat ! !

2.4.3. L'atome est soumis à l'action d'un champ $\vec{B}$ magnétostatique uniforme. On s'intéresse à l'émission de la lumière dans un plan d'observation parallèle à $\vec{B}$.

2.4.3.1.

- En absence du champ magnétique $\vec{B}$, la fréquence de la lumière émise dans le plan d'observation (suivant $\triangle$) est :

$$\upsilon_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

- En absence du champ magnétique $\vec{B}$, On observe deux radiations lumineuses de fréquences respectives : υ_- et υ_+ telles que :

$$\upsilon_- = \frac{\omega_-}{2\pi} = \frac{\omega_o}{2\pi}\left(1 - \frac{eB}{2\omega_o m_e}\right) \qquad \text{et} \qquad \upsilon_+ = \frac{\omega_+}{2\pi} = \frac{\omega_o}{2\pi}\left(1 + \frac{eB}{2\omega_o m_e}\right)$$

Ce résultat signifie que les niveaux d'énergie pour une énergie donnée E,quant l'atome est placé dans un champ magnétique, sont séparés en deux niveaux distincts de :

$$\Delta E = \frac{heB}{4\pi m_e} = \frac{\hbar eB}{2m_e} \quad \text{avec} \quad h \ : \text{constante de Plank} \quad \text{et} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

C'est le résultat connu sous le nom de l'*effet Zeeman*, du non du physicien hollandais Péter Zeeman [1865-1943] qui découvrit expérimentalement ce phénomène.

2.4.3.2.

- L'onde émise de fréquence υ_o est polarisée rectilignement suivant l'axe Oz .
- Le mouvement circulaire dans le sens direct de fréquence υ_+ donne une onde polarisée rectilignement mais orthogonale au champ $\vec{B}$.
- Le mouvement circulaire dans le sens rétrograde de fréquence υ_- donne une onde polarisée rectilignement mais orthogonale au champ $\vec{B}$.

2.4.3.3. Application numérique :

$$\upsilon_o \approx 0,75.10^{15}\ Hz$$
$$\upsilon_- \approx 0,75.10^{15}\ Hz$$
$$\upsilon_+ \approx 0,75.10^{15}\ Hz$$

2.4.4. L'atome est soumis à l'action d'un champ $\vec{B}$ magnétostatique uniforme. On s'intéresse à l'émission de la lumière dans un plan d'observation perpendiculaire à $\vec{B}$.

2.4.4.1. Dans la direction de l'axe Oz : $\underline{\vec{\mathcal{E}}} = \underline{\vec{\mathcal{B}}} = \vec{0}$, pas de rayonnement, la lumière émise est, donc, caractérisée par deux raies de fréquences : υ_- et υ_+.

2.4.4.2. Les raies observées sont polarisées circulairement.

2.4.4.3. Cf. T.P Optique (*polarisation de la lumière*).

2.4.5. Lampe à vapeur de cadmium.

2.4.5.1. On a trois raies spectrales de longueurs d'ondes :

$$\lambda_o - \Delta\lambda \ , \ \lambda_o \ \text{ et } \ \lambda_o + \Delta\lambda$$

et on a :

$$\Delta\upsilon_+ = \frac{eB}{4\pi m_e} = c_o\left(\frac{1}{\lambda_o - \Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda_o + \Delta\lambda}\right) = c_o\frac{\Delta\lambda}{\lambda_o^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = \left(\frac{e\lambda_o}{4\pi c_o m_e}\right) B}$$

2.4.5.2.

$$\text{Le terme } \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = aB \quad \text{avec} \quad a = \frac{e}{m_e}\left(\frac{\lambda_o}{4\pi c_o}\right)$$

D'après la figure donnant les variation de $\Delta\lambda$ en fonction de B, on a :

$$a = \frac{11,2 \times 10^{-6}}{0,32} = 35 \times 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{e}{m_e} = 2,1 \times 10^{11} A.s.kg^{-1}}$$

2.4.5.3. Cf. TP *Interféromètre de Michelson* (mise en évidence du phénomène de battement).